www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

SESSION DE 1989 MATHÉMATIQUES 1ÈRE ÉPREUVE DURÉE 4 H - COEFFICIENT 4

(Voie Economique)

EXERCICE 1 :

On note $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On pose $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$ pour tout triplet (a, b, c) de $\mathbf{R}^3$.

1°) a) Calculer $(bJ+cK)^p$ pour tout couple (b, c) de $\mathbf{R}^2$ et tout entier naturel non nul p.

b) Calculer $[M(a, b, c)]^n$ pour tout triplet (a, b, c) de $\mathbf{R}^3$ et tout entier naturel non nul n.

c) En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel non nul n.

2°) On désigne par E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ qui commutent avec A.
Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ dont (I, J, K) constitue une base.

3°) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on désigne par F_n l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $M^n = A$.

a) Prouver que $F_n \subset E$.

b) Déterminer l'unique matrice de F_{2n+1} et la paire de matrices constituant F_{2n}.

EXERCICE 2 :

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ell nx}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(ℓn désigne le logarithme népérien).
Pour tout entier naturel non nul n, on définit de plus la fonction f_n sur $\mathbf{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ell nx & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1°) Montrer que f et f_n sont continues sur $[0, 1]$.

2°) a) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^{2i+1} = \frac{x\,[1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2}]}{1 + x^2}$$

b) En déduire pour tout entier naturel n, la relation :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = u_1 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{f_{2n+3}(x)}{1+x^2}\,dx$$

3°) On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i u_{2i+1}$

a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \left| \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - S_n \right| < -u_{2n+3}$

b) Calculer u_p pour tout entier naturel non nul p et en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

TSVP

EXERCICE 3 :

Une loterie comporte 150 billets dont 2 sont gagnants et permettent de gagner chacun 1 lot.
Un joueur achète n billets ($n < 150$).

1°) Soit $P(n)$ la probabilité pour notre joueur de gagner au moins un lot.

a) Calculer $P(n)$.

b) Écrire $P(n)$ sous forme d'un polynôme du 2e degré en n.
On notera Q ce polynôme.

2°) Ce joueur ne connaît pas les probabilités et pense avoir $\tilde{P}(n) = n/150$ chances de gagner au moins un lot en ayant acheté n billets ($n < 150$).

a) Q désignant le polynôme défini dans la question 1°) b), résoudre dans l'intervalle [0, 150] l'équation $Q(x) = \tilde{P}(n)$ où n est un nombre entier fixé, inférieur à 150.

b) En déduire le nombre de billets « réellement » suffisant pour avoir $n/150$ chances de gagner au moins un lot.
Quelle est l'économie de billets que l'on peut faire réaliser à ce joueur ?

3°) a) Pour quelle valeur n_0 de n cette économie est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ?

b) Retrouver graphiquement le résultat précédent.

EXERCICE 4 :

On désigne par f, g et h les fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{-x^4 - x^2 + 2}}{\sqrt[6]{x^8 - 4x^5 - x^3 + 1}}$$

$$g(x) = x^8 - 4x^5 - x^3 + 1$$

$$h(x) = 8x^5 - 20x^2 - 3$$

1°) En étudiant les variations de la fonction h sur R, montrer que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique x_0 comprise entre 1 et 2 ; et déterminer le signe de $h(x)$ sur R.

2°) a) En déduire que $g(x)$ possède deux racines et deux seulement, x_1 et x_2 telles que :

$$0 < x_1 < 1 < x_0 < x_2 < 2$$

b) Déterminer le domaine de définition de f.

3°) Montrer que le graphe C représentatif de f possède deux asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées Oy et préciser les positions relatives graphe-asymptotes.

4°) Montrer que C a une asymptote horizontale D et préciser les positions relatives de C et D.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail